Differentialgleichungen (DGL): Wichtige Basics + 4 Lösungsmethoden

Hallöchen! In diesem Video lernst du die Grundlagen zu den Differentialgleichungen kennen. Nach diesem Video wirst du Differentialgleichungen klassifizieren und lösen können.

Wenn du vorhast, dich zum Beispiel

- mit der atomaren Welt,
- mit der Bewegung der Planeten,
- mit chemischen Prozessen,
- mit elektrischen Schaltungen,
- mit Wettervorhersagen
- oder mit der Ausbreitung eines Virus

zu beschäftigen, dann wirst du irgendwann auf sogenannte Differentialgleichungen stoßen.

Sobald du verstanden hast, wie Differentialgleichungen funktionieren und wie du sie lösen kannst, so wirst du in der Lage sein, in die Vergangenheit und in die Zukunft zu sehen. In diesem Video bringe ich dir die Grundlagen dazu bei.

1.1 Was ist eine Differentialgleichung?

Schauen wir uns als ein einfaches Beispiel das Hooke'sche Gesetz an:

$$F = -D\,y \tag{1}$$

Dieses Gesetz beschreibt die rücktreibende Kraft F auf eine Masse, die an einer Feder dranhängt. Diese Kraft erfährt die Masse, wenn du sie um die Strecke y aus der Ruhelage auslenkst. D ist hierbei ein konstanter Koeffizient, der beschreibt, wie schwer es ist, die Feder zu dehnen oder zu stauchen.

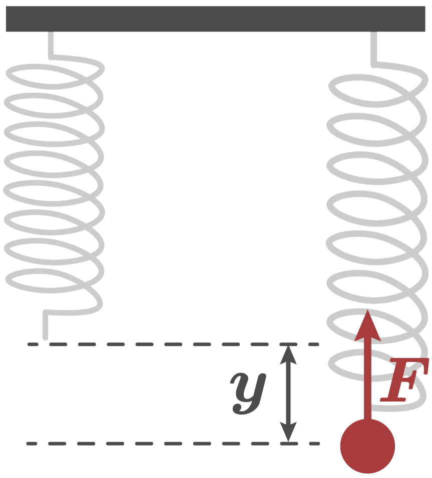

Figure 1: Hooke'sches Gesetz

Die Masse m ist in der Kraft versteckt. Wir können die Kraft nach dem dritten Newton-Axiom als $m\,a$ schreiben:

$$m\,a \;=\; -D\,y \tag{2}$$

Hierbei ist a die Beschleunigung, die die Masse erfährt, wenn sie um y aus der Ruhelage ausgelenkt ist.

Sobald du an der Masse ziehst und sie loslässt, wird die Feder anfangen, hin und her zu schwingen. Ohne Reibung, wie in diesem Fall, wird sie niemals zum Stillstand kommen.

Während die Masse schwingt, ändert sich natürlich die Auslenkung y. Die Auslenkung ist also abhängig von der Zeit t. Damit ist auch die Beschleunigung a abhängig von der Zeit. Die Masse bleibt natürlich zu jedem Zeitpunkt gleich, egal wie stark die Feder ausgelenkt ist. Das gilt in guter Näherung auch für die Federkonstante D:

$$m\,a(t) \;=\; -D\,y(t) \tag{3}$$

Wenn wir nur noch m auf die andere Seite bringen, können wir mit dieser Gleichung zu jeder Auslenkung y die Beschleunigung berechnen, die die Masse erfährt:

$$a(t) \;=\; -\frac{D}{m}\,y(t) \tag{4}$$

Doch was ist, wenn wir an der Frage interessiert sind:

Bei welcher Auslenkung y wird die Feder nach 24 Sekunden sein?

Um eine derartige Zukunftsfrage beantworten zu können, müssen wir wissen, wie genau y von der Zeit t abhängt. Wir wissen eben nur, DASS y von der Zeit abhängt, aber nicht WIE.

Und genau bei solchen Zukunftsfragen kommen Differentialgleichungen ins Spiel. Wir können leicht zeigen, dass die Beschleunigung a die zweite Zeitableitung des zurückgelegten Wegs ist, also in unserem Fall ist es die zweite Ableitung von y nach der Zeit t:

$$\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{D}{m}\,y(t) \tag{5}$$

Und schon haben wir eine Differentialgleichung für die Auslenkung y aufgestellt! Eine Differentialgleichung (kurz: *DGL*) erkennst du daran, dass in ihr *neben der gesuchten Funktion* $y(t)$ auch *Ableitungen dieser Funktion* vorkommen. Wie in diesem Fall die zweite Ableitung von y nach der Zeit t.

Eine **Differentialgleichung** ist eine Gleichung, die eine gesuchte Funktion y und Ableitungen dieser Funktion enthält.

1.2 Unterschiedliche Schreibweise einer DGL

Du wirst sicherlich vielen Schreibweisen einer DGL begegnen. Wir haben unsere aufgestellte DGL (**??**) in einer sogenannten Leibniz-Notation aufgeschrieben:

Leibniz-Notation

$$\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{D}{m}\,y(t) \tag{6}$$

Dieser wirst du oft in der Physik begegnen. Wir können sie auch etwas kompakter aufschreiben, ohne die Zeitabhängigkeit zu erwähnen:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{D}{m}\,y \tag{7}$$

Wenn die Funktion y nur von der Zeit t abhängt, dann können wir die Zeitableitung noch kompakter mit der sogenannten Newton-Notation aufschreiben. Eine Zeitableitung von y entspricht einem Punkt über dem y. Bei zwei Ableitungen wie in unserem Fall wären es also zwei Punkte:

Newton-Notation

$$\ddot{y} = -\frac{D}{m}\,y \tag{8}$$

Offensichtlich ist diese Schreibweise eher ungeeignet, wenn du die zehnte Ableitung betrachten willst...

Eine weitere Notation, der du eher in der Mathematik begegnen wirst, ist die Lagrange-Notation. Hier benutzen wir Striche für die Ableitungen. Für zweite Ableitung also zwei Striche:

Lagrange-Notation

$$y'' = -\frac{D}{m}\,y \tag{9}$$

Bei der Lagrange-Notation sollte es aus dem Zusammenhang klar sein, nach welcher Variablen abgeleitet wird. Wenn es nicht klar ist, dann solltest du explizit ausschreiben, von welcher Variablen y abhängt:

$$y''(t) = -\frac{D}{m}\,y(t) \tag{10}$$

Jede Schreibweise hat ihre Vor- und Nachteile. Denk jedoch dran, dass das nur verschiedene Schreibweisen sind, die dieselbe Physik beschreiben.

Auch das Umformen und Umbenennen ändert nichts an der Physik unter der Haube dieser DGL. Wir könnten die Auslenkung y genauso x nennen:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{D}{m}\,x = 0 \tag{11}$$

1.3 Was soll ich mit einer DGL tun?

Um unsere ursprüngliche Frage

Bei welcher Auslenkung y wird die Feder nach 24 Sekunden sein?

beantworten zu können, müssen wir die aufgestellte **Differentialgleichung lösen**. Eine DGL zu lösen, bedeutet, dass du herausfinden musst, *wie* die gesuchte Funktion y genau von der Variablen t abhängt:

$$y(t) = \text{irgendeine Formel} \tag{12}$$

Für einfache Differentialgleichungen, wie die der schwingenden Masse, gibt es Lösungsmethoden, die du anwenden kannst, um die gesuchte Funktion $y(t)$ herauszufinden. Bedenke jedoch, dass es kein allgemeines Rezept gibt, wie du eine *beliebige* Differentialgleichung lösen kannst. Für manche DGL gibt es nicht mal eine *analytische Lösung*! Mit 'analytisch' ist gemeint, dass du keine konkrete Gleichung für die Funktion $y(t)$ aufschreiben kannst:

$$y(t) = \text{es gibt keine Formel} \tag{13}$$

Die einzige Möglichkeit ist in diesem Fall die DGL am Computer *numerisch zu lösen*. Dann spuckt der Computer eben keine konkrete Formel heraus, sondern Datenpunkte, die du in einem Diagramm darstellen und daran das Verhalten der DGL untersuchen kannst.

1.4 Eine Differentialgleichung erkennen

Sobald du auf eine Differentialgleichung triffst, ist es als erstes wichtig herauszufinden,

- *was die gesuchte Funktion ist*
- und *von welchen Variablen sie abhängt.*

Bei unserer DGL (**??**) der schwingenden Masse heißt die gesuchte Funktion y und sie hängt von der Variablen t ab.

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{D}{m}\, y(t) \tag{14}$$

Schau dir mal als Beispiel die Wellengleichung an, die das elektrischer Feld einer elektromagnetischen Welle beschreibt, die sich mit der Lichtgeschwindigkeit c ausbreitet:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \tag{15}$$

Was ist bei dieser DGL die gesuchte Funktion? Es ist die Funktion E, weil hier ihre Ableitungen vorkommen. Von welchen Variablen hängt die Funktion E ab? Die Abhängigkeit ist hier zwar nicht explizit angegeben, aber an dem geschwungenen Del-Zeichen ∂ kannst du sofort sagen, dass E von mehreren Variablen abhängen muss. Für uns ist es erstmal unwichtig, was ein geschwungenes ∂ von einem normalen d unterscheidet. An den Ableitungen kannst du sofort sehen, dass E von x, y, z und von t abhängen muss. Also von insgesamt vier Variablen: $E(t, x, y, z)$.

Schauen wir uns ein etwas komplexeres Beispiel an. Dieses System von Differentialgleichungen beschreibt, wie sich eine Masse in einem Gravitationsfeld bewegt:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= G\,\frac{m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} &= G\,\frac{m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\ \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} &= G\,\frac{m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\end{aligned} \tag{16}$$

Du hast hier ein sogenanntes **gekoppeltes Differentialgleichungssystem** vor dir. In diesem Fall reicht *eine einzige* Differentialgleichung nicht aus, um die Bewegung einer Masse im Gravitationsfeld zu beschreiben. Hier werden sogar drei Funktionen gesucht, nämlich die Bahnkurven x, y und z, die eine Position der Masse im dreidimensionalen Raum bestimmen. Jede Funktion beschreibt die Bewegung in eine der drei Raumrichtungen. Und alle drei Funktionen hängen nur von der Zeit t ab.

Was bedeutet es überhaupt, wenn wir *gekoppelte* Differentialgleichungen haben? Mit 'gekoppelt' ist gemeint, dass zum Beispiel in der ersten DGL für die Funktion x, auch die Funktion y vorkommt. Wir können also nicht einfach die erste DGL unabhängig von der zweiten DGL lösen, weil die zweite DGL uns verrät, wie sich das y in der ersten DGL verhält. In allen drei DGL kommen die Funktionen x, y und z vor, das heiß, wir müssen alle drei DGL gleichzeitig lösen.

1.5 Klassifizierung: Welche DGL-Typen gibt es?

Es gibt unterschiedlichste Differentialgleichungen da draußen. Beim genauen Hinsehen, wirst du aber feststellen, dass einige Differentialgleichungen *Ähnlichkeiten* untereinander aufweisen.

Nachdem du herausgefunden hast, was die gesuchte Funktion ist und von welchen Variablen sie abhängt, solltest du einige weitere grundlegende Fragen beantworten, um die DGL besser kennenzulernen:

- **Ist die DGL gewöhnlich oder partiell?** Partielle Differentialgleichungen beschreiben mehrdimensionale Probleme und sind deutlich komplexer.
- **Von welcher Ordnung ist die DGL?** DGL 1. Ordnung sind meistens leicht zu lösen und beschreiben beispielsweise exponentielles Verhalten, wie den radioaktiven Zerfall oder das Abkühlen einer Flüssigkeit. Differentialgleichungen 2. Ordnung dagegen sind etwas komplexer und kommen auch oft in der Natur vor. Die Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik, die Schrödinger-Gleichung der Quantenmechanik - das sind alles Differential-

gleichungen zweiter Ordnung. Erst ab der 2. Ordnung kann eine DGL eine Schwingung beschreiben. Und erst ab der dritten Ordnung kann eine DGL Chaos beschreiben.

- **Ist die DGL linear oder nicht-linear?** Für lineare DGL gilt das Superpositionsprinzip, was unglaublich nützlich ist, beispielsweise bei der Beschreibung elektromagnetischer Phänomene. Nicht-lineare DGL sind deutlich komplexer und kommen beispielsweise in der nicht-linearen Elektronik vor bei der Beschreibung von supraleitenden Strömen. Außerdem kann nur bei nicht-linearen Differentialgleichungen ab der dritten Ordnung Chaos auftreten. Sobald du auf eine nicht-lineare DGL triffst, kannst du eigentlich direkt deinen Stift und Papier wegschmeißen und die DGL direkt am Computer numerisch verarzten. Die meisten nicht-linearen DGL lassen sich nicht mal analytisch lösen!

- **Ist die lineare DGL homogen oder inhomogen?** Homogene lineare DGL sind einfacher als die inhomogenen und beschreiben beispielsweise eine ungestörte Schwingung, während inhomogene DGL in der Lage sind auch von außen gestörte Schwingungen zu beschreiben.

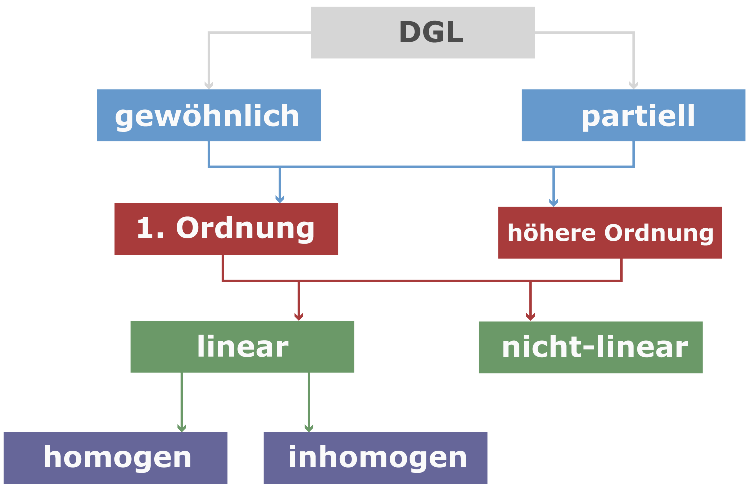

Figure 2: Verschiedene Arten von Differentialgleichungen

Lass uns als erstes lernen, wie man diese Fragen beantworten kann. Nach dem du eine DGL klassifiziert hast, kannst du dann gezielt eine passende Lösungsmethode anwenden, um die DGL zu lösen. Selbst, wenn es keine konkrete Lösungsmethode gibt, weißt du anhand der Klassifizierung, wie komplex eine DGL überhaupt ist.

1.5.1 Ist eine DGL gewöhnlich oder partiell?

Unsere DGL für die schwingende Masse

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{D}{m}\,y = 0 \tag{17}$$

ist eine **gewöhnliche** Differentialgleichung. Gewöhnlich bedeutet, dass die gesuchte Funktion $y(t)$ nur *von einer einzigen* Variablen abhängt. In diesem Fall von der Zeit t.

Gewöhnliche Differentialgleichung
Bei diesem Typ der DGL hängt die gesuchte Funktion von einer einzigen Variable ab.

Die Wellengleichung dagegen

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \tag{18}$$

ist eine **partielle** Differentialgleichung. 'Partiell' bedeutet, dass die gesuchte Funktion E von mindestens zwei Variablen abhängt und es kommen Ableitungen nach diesen Variablen vor. In diesem Fall hängt E von vier Variablen: t, x, y und z ab. Und in der DGL tauchen auch Ableitungen nach diesen Variablen auf.

Partielle Differentialgleichung
Bei diesem Typ der DGL hängt die gesuchte Funktion von mindestens zwei Variablen ab und es kommen Ableitungen der Funktion nach mindestens zwei dieser Variablen vor.

1.5.2 Von welcher Ordnung ist eine DGL?

Weiterhin ist unsere DGL für die schwingende Masse eine **Differentialgleichung 2. Ordnung**. Die Ordnung einer DGL ist die höchste vorkommende Ableitung der gesuchten Funktion:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{D}{m}\,y = 0 \tag{19}$$

Da in unserer DGL die zweite Ableitung die höchste und sogar die einzige vorkommende Ableitung von y ist, ist das daher die DGL 2. Ordnung.

Es ist immer möglich eine DGL höherer Ordnung in ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung umzuwandeln. Manchmal ist dieses Vorgehen beim Lösen der DGL hilfreich. Wir können beispielsweise diese DGL 2. Ordnung in zwei gekoppelte Differentialgleichungen 1. Ordnung umwandeln. Dazu müssen wir lediglich eine neue Funktion einführen, nennen wir sie

v und definieren sie als die erste Zeitableitung von y:

$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \tag{20}$$

Das ist auch schon eine der beiden DGL 1. Ordnung. Jetzt müssen wir nur noch die zweite Ableitung in der ursprünglichen DGL mit der Ableitung von v ausdrücken. Dann bekommen wir die zweite DGL 1. Ordnung:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{D}{m}y = 0 \tag{21}$$

Die beiden sind *gekoppelte* DGL, die wir gleichzeitig lösen müssen. Sie sind gekoppelt, weil y in der ersten DGL vorkommt und v in der zweiten DGL.

Diese Vorgehensweise kannst du immer anwenden, wenn du die Ordnung einer DGL reduzieren willst. Der Preis, den du dafür bezahlen musst, sind zusätzliche gekoppelte Differentialgleichungen.

Die Differentialgleichung für das Zerfallsgesetz:

$$-\lambda N = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} \tag{22}$$

ist dagegen eine **Differentialgleichung 1. Ordnung**, weil die höchste vorkommende Ableitung der gesuchten Funktion $N(t)$ die erste Ableitung ist.

Differentialgleichung n-ter Ordnung
Eine DGL heißt DGL n-ter Ordnung, wenn in der DGL die n-te Ableitung die höchste ist, die in der DGL vorkommt.

1.5.3 Ist eine DGL linear oder nicht-linear?

Unsere DGL für die schwingende Masse ist außerdem **linear**:

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)^1 + \frac{D}{m}y^1 = 0 \tag{23}$$

Linear bedeutet, dass die gesuchte Funktion und ihre Ableitungen *nur Potenzen von 1* enthalten und es kommen *keine Produkte von Ableitungen mit der Funktion* vor, wie y^2 oder $y\,\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$. Es kommen auch *keine verketteten* Funktionen, wie $\sin(y(t))$ oder Wurzel aus $y(t)$ vor. Wenn das der Fall ist, dann sagen wir, dass eine DGL linear ist.

Beachte, dass 'hoch zwei' in der zweiten Ableitung in der Leibniz-Notation $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$ keine Potenz der

Ableitung ist, sondern lediglich eine Schreibweise dafür, dass es sich um die zweite Ableitung handelt.

Das Zerfallsgesetz ist auch linear:

$$-\lambda N^{1} = \left(\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right)^{1} \tag{24}$$

Wie sieht es mit der Wellengleichung aus? Sie ist auch linear:

$$\left(\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}\right)^{1} + \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}\right)^{1} + \left(\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}\right)^{1} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}\right)^{1} \tag{25}$$

Lineare Differentialgleichung
Eine DGL ist linear, wenn die gesuchte Funktion und ihre Ableitungen nur mit der Potenz 1 auftauchen und es kommen keine Produkte der gesuchten Funktion mit ihren Ableitungen vor und auch keine Verkettungen mit der gesuchten Funktion.

Das gekoppelte DGL-System für die Bewegung einer Masse im Gravitationsfeld ist dagegen **nicht-linear**:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} &= G\,\frac{m}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\\ \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} &= G\,\frac{m}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\\ \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} &= G\,\frac{m}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\end{aligned} \tag{26}$$

$$\tag{27}$$

Hier kommen die gesuchten Funktion $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$ quadriert vor. Aber selbst, wenn die Quadrate nicht da wären, gäbe es noch die Wurzel, die das DGL-System nicht-linear macht!

1.5.4 Ist eine lineare DGL homogen oder inhomogen?

Bei den nächsten Typen von Differentialgleichungen sind die *Koeffizienten* entscheidend, die mit der gesuchten Funktion und ihren Ableitungen multipliziert sind. Bei einigen Lösungsmethoden ist es wichtig zu unterscheiden zwischen...

- **konstanten Koeffizienten** - diese HÄNGEN NICHT von den Variablen ab, von denen auch die gesuchte Funktion abhängt.
- **nicht-konstanten Koeffizienten** - diese HÄNGEN von den Variablen ab, von denen die gesuchte Funktion abhängt.

Ein Koeffizient muss nicht unbedingt mit der gesuchten Funktion oder ihrer Ableitung multipliziert sein. Er kann auch *allein stehen*! In diesem Fall bezeichnen wir den alleinstehenden Koeffizienten als **Störfunktion**.

In unserer DGL für die schwingende Masse gibt es einen konstanten Koeffizienten, der mit der gesuchten Funktion y multipliziert ist, nämlich D/m. Genau genommen, steht vor der zweiten Ableitung auch ein konstanter Koeffizient, nämlich 1. Und der alleinstehende Koeffizient, also die Störfunktion, ist hier 0. Sie gibt es also quasi nicht:

$$1\,\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} \;+\; \frac{D}{m}\,y \;=\; 0 \tag{28}$$

Homogene lineare Differentialgleichung

Wenn die Störfunktion Null ist, dann nennen wir die lineare Differentialgleichung **homogen**.

Unsere DGL für die schwingende Masse ist also homogen.

Die Wellengleichung ist auch homogen:

$$1\,\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \;+\; 1\,\frac{\partial^2 E}{\partial y^2} \;+\; 1\,\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \;=\; \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \tag{29}$$

Denn hier gibt es auch keinen alleinstehenden Koeffizienten, die Störfunktion ist Null.

Die DGL für eine erzwungene Schwingung ist dagegen inhomogen:

$$1\,\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} \;+\; \mu\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \;+\; \frac{D}{m}\,y \;=\; F(t) \tag{30}$$

Hier entspricht die externe Kraft $F(t)$ der Störfunktion. Wie du siehst, steht sie ganz allein dar, ohne mit der gesuchten Funktion $y(t)$ oder ihren Ableitungen multipliziert zu sein. Außerdem ist die Störfunktion $F(t)$ zeitabhängig, sie ist also ein nicht-konstanter Koeffizient.

1.6 Nebenbedingungen: Rand- und Anfangsbedingungen

Eine Differentialgleichung allein, ist nicht ausreichend, um ein physikalisches System *eindeutig* zu beschreiben. Die Lösung einer Differentialgleichung beschreibt ganz viele mögliche Systeme, die ein bestimmtes Verhalten aufweisen. Zum Beispiel die Lösung des Zerfallsgesetzes beschreibt ein *exponentielles* Verhalten. Das Wissen über ein exponentielles Verhalten reicht aber nicht aus, um konkret sagen zu können, wie viele Atomkerne nach 10 Sekunden zerfallen sind.

Genau deshalb hat jede DGL meistens auch sogenannte **Nebenbedingungen**. Das sind zusätzliche Informationen, die zu einer DGL gegeben sein müssen, um die Lösung der DGL konkret festzulegen. Die *Anzahl* dafür notwendiger Nebenbedingungen hängt davon ab, von *welcher Ordnung* eine DGL ist.

Für eine DGL 1. Ordnung ist *eine einzige Nebenbedingung* notwendig, nämlich

1. ein Funktionswert der gesuchten Funktion $y(t)$

Für das Zerfallsgesetz sollte beispielsweise bekannt sein, wie viele noch nicht zerfallene Atomkerne N zum Zeitpunkt $t = 0$ da waren. Zum Beispiel 1000 Atomkerne: $N(0) = 1000$.

Für eine DGL 2. Ordnung sind *zwei Nebenbedingungen* notwendig:

1. ein Funktionswert der gesuchten Funktion $y(t)$ und
2. zum Beispiel ein Funktionswert der ersten Ableitung $y'(t)$

Für eine schwingende Masse wäre der Funktionswert $y(0) = 1$, der die Anfangsauslenkung festlegt und der Funktionswert der ersten Ableitung $y'(0) = 0$, der die Anfangsgeschwindigkeit der Masse festlegt.

Für eine DGL 3. Ordnung wären dann *drei Nebenbedingungen* notwendig, um ein System eindeutig zu beschreiben:

1. ein Funktionswert der gesuchten Funktion $y(t)$
2. ein Funktionswert z.B. ihrer ersten Ableitung $y'(t)$ und
3. ein Funktionswert z.B. ihrer zweiten Ableitung $y''(t)$

Für eine DGL 4. Ordnung wären dann *vier Nebenbedingungen* notwendig und so weiter...

Um die Lösung einer DGL n-ter Ordnung eindeutig festzulegen, sind n Nebenbedingungen notwendig.

Meistens wirst du auf sogenannte Anfangsbedingungen und Randbedingungen stoßen. Das sind auch alles nur Namen für Nebenbedingungen, die darüber aussagen, welche Art von Information du über das System hast.

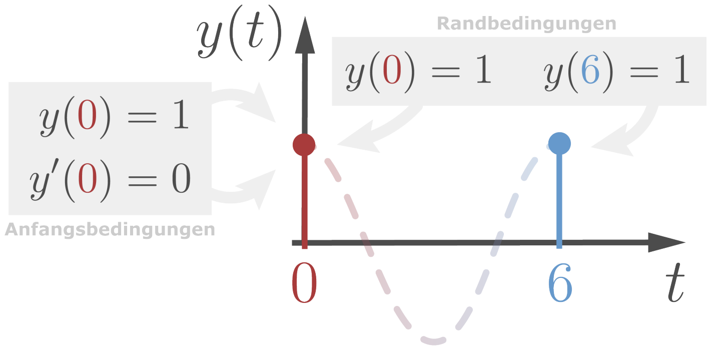

Figure 3: Randbedingungen und Anfangsbedingungen im Vergleich

Manchmal weißt du beispielsweise, wie das System zu einem einzigen bestimmten Zeitpunkt gegeben war. Das könnte der Anfangszeitpunkt sein, zu dem du eine schwingende Masse ausgelenkt und losgelassen hast. In so einem Fall sprechen wir von **Anfangsbedingungen**. Du legst *zu einem* bestimmten Zeitpunkt, zum Beispiel zum Zeitpunkt $t = 0$ fest, wie die Auslenkung $y(0)$ war. Und da wir zwei Nebenbedingungen brauchen, legst du auch fest, welche Ableitung $y'(0)$ (also die Geschwindigkeit) zu diesem gleichen Zeitpunkt $t = 0$ war.

> Eine DGL zusammen mit Anfangsbedingungen bezeichnen wir als **Anfangswertproblem**. Lösen wir das Anfangswertproblem, so können wir mit der Lösung das zukünftige Verhalten eines Systems vorhersagen.

Manchmal hast du Pech und weißt nicht, welche Geschwindigkeit die schwingende Masse zu einem bestimmten Anfangszeitpunkt $t = 0$ hatte. Du kennst also nicht die Ableitung von $y'(0)$ zum Zeitpunkt $t = 0$, zu dem du auch die Auslenkung kennst. Du brauchst aber dringend zwei Nebenbedingungen, sonst kannst du damit keine konkreten Zahlen ausrechnen... Aber eventuell weißt du, dass beispielsweise nach $t = 6\,\mathrm{s}$ die schwingende Masse im maximal ausgelenkten Zustand war. Du kennst also die Auslenkung $y(6)$.

Wenn du Nebenbedingungen, wie $y(t_1)$ und $y(t_2)$, gegeben hast, die zu zwei *verschiedenen* Zeitpunkten t_1 und t_2 das System beschreiben, dann sprechen wir von **Randbedingungen**.

Eine DGL zusammen mit zwei oder mehr Randbedingungen bezeichnen wir als **Randwertproblem**. Lösen wir das Randwertproblem, so können wir mit der Lösung vorhersagen, wie sich das System innerhalb dieser Randwerte verhält.

Das mit dem 'Funktionswert an zwei verschiedenen Zeitpunkten' war natürlich nur ein Beispiel. Statt der Zeit könnte es eine beliebige Variable sein, die das System, meistens an den Rändern, festlegt. Zu verschiedenen Zeiten, zu verschiedenen Orten, zu verschiedenen Winkeln und so weiter.

Soweit so gut. Lass uns nun vier Methoden anschauen, wie du einfache Differentialgleichungen lösen kannst.

1.7 Lösungsmethode #1: Trennung der Variablen (TdV)

Mit dieser Methode kannst du *gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung* lösen, die *homogen* sind. (Denk dran, dass eine homogene DGL impliziert, dass sie auch linear ist.) Dieser Typ der DGL hat die Form:

$$y' \;+\; K(x)\,y \;=\; 0 \tag{31}$$

Hierbei muss der Koeffizient K *nicht unbedingt konstant* sein, sondern kann auch von x abhängen! Beachte außerdem, dass vor der ersten Ableitung y' der Koeffizient gleich 1 sein muss. Wenn das bei dir nicht der Fall ist, dann musst einfach die ganze Gleichung durch den Koeffizienten teilen, der vor y' steht. Dann hast du die passende Form.

Bei dieser Lösungsmethode werden y und x als zwei Variablen aufgefasst und voneinander getrennt, indem y auf die eine Seite und x auf die andere Seite der Gleichung gebracht wird. Hierzu eignet sich die Leibniz-Notation der DGL am besten:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \;+\; K(x)\,y \;=\; 0 \tag{32}$$

Bringe $K(x)\,y$ auf die rechte Seite:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \;=\; -K(x)\,y \tag{33}$$

Multipliziere die Gleichung mit $\mathrm{d}x$ und dann teile die Gleichung durch y. Auf diese Weise hast du auf der linken Seite nur y-Abhängigkeit stehen und auf der rechten Seiten nur die x-Abhängigkeit:

$$\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y \;=\; -K(x)\,\mathrm{d}x \tag{34}$$

Jetzt kannst du auf der linken Seite über y integrieren und auf der rechten Seite über x:

$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y \;=\; -\int K(x)\,\mathrm{d}x \tag{35}$$

Die Integration von $1/y$ ergibt den natürlichen Logarithmus von y. Das musst du am besten auswendig wissen, weil du so einem Integral oft begegnen wirst. Vergiss auch nicht die Integrationskonstante! Nennen wir sie zum Beispiel A:

$$\ln(y) \;+\; A \;=\; -\int K(x)\,\mathrm{d}x \tag{36}$$

Jetzt musst du nur noch nach der gesuchten Funktion y umstellen. Benutze dazu auf beiden Seiten die Exponentialfunktion $\mathrm{e}^{\cdots}$:

$$\mathrm{e}^{\ln(y) \;+\; A} \;=\; \mathrm{e}^{-\int K(x)\,\mathrm{d}x} \tag{37}$$

Die Summe im Exponentialterm auf der linken Seite kannst du in ein Produkt aufspalten, wobei $\mathrm{e}^{\ln(y)}$ einfach y ist:

$$y\,\mathrm{e}^{A} \;=\; \mathrm{e}^{-\int K(x)\,\mathrm{d}x} \tag{38}$$

Bringe nur noch die Konstante e^{A} auf die rechte Seite:

$$y \;=\; \frac{1}{\mathrm{e}^{A}}\,\mathrm{e}^{-\int K(x)\,\mathrm{d}x} \tag{39}$$

und benenne sie in eine neue Konstante C um.

Als Ergebnis bekommst du eine allgemeine Lösungsformel, die du immer benutzen kannst, um homogene lineare Differentialgleichungen zu lösen. Du musst nicht unbedingt die Trennung der Variablen immer wieder anwenden, sondern kannst direkt die Lösungsformel benutzen:

Lösungsformel für gewöhnliche homogene DGL 1. Ordnung

$$y \;=\; C\,\mathrm{e}^{-\int K(x)\,\mathrm{d}x} \tag{40}$$

Beispiel aus der Atomphysik: Zerfallsgesetz

Schauen wir uns beispielsweise die DGL für das Zerfallsgesetz an:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} + \lambda N = 0 \tag{41}$$

Die gesuchte Funktion y ist in diesem Fall die Anzahl noch nicht zerfallener Atomkerne N und die Variable x ist in diesem Fall die Zeit t. Und der Koeffizient K ist in diesem Fall eine Zerfallskonstante λ. Es sind lediglich nur andere Buchstaben. Der Typ der DGL ist derselbe! Nach der Lösungsformel musst du den Koeffizienten, also die Zerfallskonstante über t integrieren. Eine Konstante zu integrieren ergibt einfach nur t. Und schon hast du die allgemeine Lösung für das Zerfallsgesetz:

$$N = C\,\mathrm{e}^{-\lambda t} \tag{42}$$

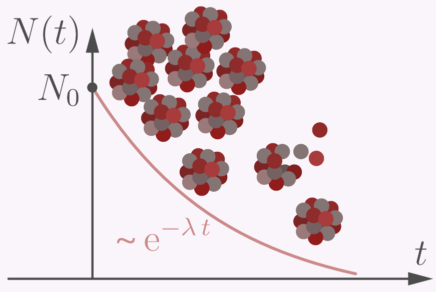

Figure 4: Exponentieller Abfall der Anzahl der Atomkerne beim Zerfallsgesetz

Damit kennst du jetzt nur das qualitative Verhalten, nämlich, dass Atomkerne *exponentiell* Zerfallen. Du kannst aber noch nicht konkret sagen, *wie viele* Kerne nach so und so viel Zeit schon zerfallen sind. Das liegt daran, dass du die Konstante C noch nicht kennst. Sie gibt schließlich beim Zerfallsgesetz die Anzahl der Atomkerne an, die am Anfang, bevor der Zerfall anfing, da waren. Du brauchst also eine Anfangsbedingung als zusätzliche Information zur DGL. Sie könnte beispielsweise so lauten: $N(0) = 1000$. Das heißt, zum Zeitpunkt $t = 0$ gab es 1000 Atomkerne. Einsetzen ergibt:

$$1000 = C\, e^{-\lambda \cdot 0} \tag{43}$$

Also muss $C = 1000$ sein:

$$N = 1000\, e^{-\lambda t} \tag{44}$$

Jetzt kannst du beliebige Zeit einsetzen und herausfinden, wie viele nicht zerfallene Atomkerne noch da sind.

1.8 Lösungsmethode #2: Variation der Konstanten (VdK)

Diese Methode ist gut geeignet für *gewöhnliche DGL 1. Ordnung*, die linear sind. Die DGL kann dabei *homogen* oder *inhomogen* sein. Die inhomogene DGL ist allgemeiner. Diesen Typ hast du genau dann, wenn du deine DGL in die folgende Form bringen kannst:

$$y' + K(x)\, y = S(x) \tag{45}$$

Die inhomogene Version unterscheidet sich von der homogenen (**??**) nur dadurch, dass der alleinstehende Koeffizient, also die Störfunktion $S(x)$, nicht null ist. Dieser Typ der DGL ist also etwas komplexer zu lösen.

Bei dieser Lösungsmethode machst du den Ansatz, dass die allgemeine Lösung $y(x)$ durch eine von x abhängige Konstante $C(x)$ gegeben ist, multipliziert mit einer homogenen Lösung, die wir als $y_{\text{h}}(x)$ bezeichnen:

$$y = C(x)\, y_{\text{h}} \tag{46}$$

Wie du die homogene Lösung y_{h} herausfindest, hast du ja bereits kennengelernt. Dazu musst du lediglich die Störfunktion Null setzen: $S(x) = 0$. Dann hast du die homogene DGL. Diese löst du mit der Trennung der Variablen oder direkt durch Benutzung der dazugehörigen Lösungsformel (**??**).

Diesen Ansatz (**??**) setzen wir in die inhomogene DGL (**??**) für y ein:

$$y' + K(x)\, C(x)\, y_{\text{h}} = S(x) \tag{47}$$

Die Ableitung y' wollen wir auch mit unserem Ansatz ersetzen. Dazu müssen wir zuerst unseren Ansatz nach x ableiten. Da sowohl $C(x)$ als auch $y_{\text{h}}(x)$ von x abhängen, müssen wir die Produktregel anwenden. Das machst du, indem du einmal $C(x)$ ableitest und lässt y_{h} stehen und dann lässt du $C(x)$ stehen und leitest y_{h} ab. Das Ergebnis ist die gesuchte Ableitung von unserem Ansatz:

$$y' = C'(x)\, y_{\text{h}} + C(x)\, y_{\text{h}}' \tag{48}$$

Die Ableitung setzen wir für y' in die allgemine Form der DGL (**??**) ein:

$$C'(x)\, y_{\text{h}} + C(x)\, y_{\text{h}}' + K(x)\, C(x)\, y_{\text{h}} = S(x) \tag{49}$$

Wenn du nur noch $C(x)$ ausklammerst, dann siehst du vielleicht, warum dieser Ansatz so geil ist:

$$C'(x)\, y_{\text{h}} + C(x)\, (y_{\text{h}}' + K(x)\, y_{\text{h}}) = S(x) \tag{50}$$

In der Klammer steht nämlich die homogene DGL (**??**), die Null ist. Der ganze Term fällt also komplett weg:

$$C'(x)\, y_{\text{h}} = S(x) \tag{51}$$

Die Gleichung kannst du jetzt nach dem unbekannten Koeffizienten $C'(x)$ umstellen:

$$C'(x) = \frac{S(x)}{y_{\text{h}}} \tag{52}$$

Um jetzt nur noch die Ableitung $C'(x)$ zu eliminieren, müssen wir beide Seiten über x integrieren:

$$\int C'(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int \frac{S(x)}{y_{\mathrm{h}}}\,\mathrm{d}x \tag{53}$$

Die rechte Seite können wir nicht konkret integrieren, weil $S(x)$ je nach Problem unterschiedlich ist. Deshalb lassen wir die rechte Seite einfach so stehen. Die linke Seite dagegen lässt sich integrieren. Wenn du $C'(x)$ integrierst, dann bekommst du $C(x)$, denn, wie du weißt, die Integration ist quasi die Umkehrung einer Ableitung. Vergiss auch nicht die Integrationskonstante, nennen wir sie B:

$$C(x) + B \;=\; \int \frac{S(x)}{y_{\mathrm{h}}}\,\mathrm{d}x \tag{54}$$

Bringen wir die Integrationskonstante auf die rechte Seite und definieren eine neue Konstante $A := -B$:

$$C(x) \;=\; \int \frac{S(x)}{y_{\mathrm{h}}}\,\mathrm{d}x \;+\; A \tag{55}$$

Wenn du jetzt nur noch den herausgefundenem Koeffizienten $C(x)$ in den ursprünglichen Ansatz einsetzt, dann bekommst du die allgemeine Lösung einer gewöhnlichen inhomogenen linearen DGL 1. Ordnung:

Lösungsformel für gewöhnliche inhomogene DGL 1. Ordnung

$$y \;=\; \left(\int \frac{S(x)}{y_{\mathrm{h}}}\,\mathrm{d}x \;+\; A\right) y_{\mathrm{h}} \tag{56}$$

Beispiel aus der Elektrotechnik: RL-Schaltkreis

Nehmen wir zum Spaß ein Beispiel aus der Elektrotechnik.

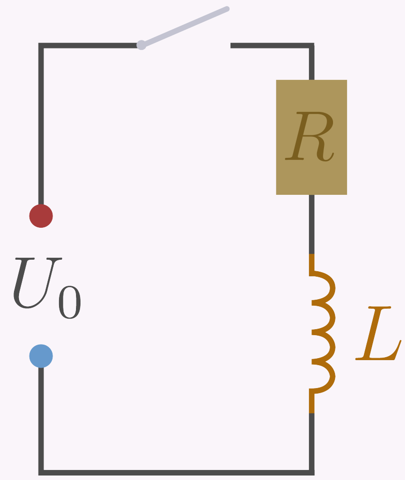

Figure 5: Eine RL-Schaltung

Betrachte einen Schaltkreis aus einer Spule, die durch die Induktivität L charakterisiert wird und einen in Reihe geschalteten elektrischen Widerstand R. Dann nehmen wir noch eine Spannungsquelle, die uns die Spannung U_0 liefert, sobald wir den Schaltkreis mit einem Schalter schließen. Dann fließt ein zeitabhängiger Strom $I(t)$ durch die Spule und den Widerstand. Der Strom hat nicht sofort seinen maximalen Wert, sondern nimmt aufgrund der Lenz-Regel langsam zu. Mithilfe der Kirchoff-Regeln können wir folgende DGL für den Strom I aufstellen:

$$L\dot{I} ~+~ RI ~-~ U_0 ~=~ 0 \tag{57}$$

Denk dran, dass der Punkt über dem I die erste Zeitableitung bedeutet. Das ist eine inhomogene lineare DGL 1. Ordnung. Das siehst du am besten, wenn du diese DGL in die uns etwas bekanntere Form (**??**) bringst. Teile auf beiden Seiten durch L. Dadurch eliminierst du das L vor der Ableitung:

$$\dot{I} ~+~ \frac{R}{L}I ~-~ \frac{U_0}{L} ~=~ 0 \tag{58}$$

Bringe den alleinstehenden Koeffizienten auf die andere Seite:

$$\dot{I} ~+~ \frac{R}{L}I ~=~ \frac{U_0}{L} \tag{59}$$

Und schon haben wir die uns vertraute Form. Die gesuchte Funktion y entspricht hier dem Strom I. Die Störfunktion $S(t)$ entspricht $\frac{U_0}{L}$ und ist in diesem Fall zeitunabhängig: $S = \frac{U_0}{L}$. Der Koeffizient $K(t)$ vor der gesuchten Funktion I entspricht $\frac{R}{L}$ und ist in diesem Fall ebenfalls zeitunabhängig: $K = \frac{R}{L}$.
Soweit so gut. Benutzen wir die eben hergeleitete Lösungsformel für die inhomogene lineare DGL 1. Ordnung. Die homogene Lösung bezeichnen wir mal passend mit I_{h}:

$$I ~=~ \left(\int \frac{U_0}{L\,I_{\text{h}}}\,\text{d}t ~+~ A \right) I_{\text{h}} \tag{60}$$

Als erstes müssen wir die homogene Lösung I_{h} bestimmen. Diese können wir schnell mithilfe der Lösungsformel (**??**) für die homogene Version der DGL berechnen:

$$I_{\text{h}} ~=~ \text{e}^{-\int \frac{R}{L}\text{d}t} \tag{61}$$

Die Konstante C_{h} in der Lösungsformel dürfen wir hier weglassen, weil wir sie später eh durch die Konstante A berücksichtigen, die in der anderen Lösungsformel (**??**) steckt. Der Koeffizient $\frac{R}{L}$ ist konstant und eine Konstante integriert, bringt lediglich ein t ein. Die homogene Lösung lautet also:

$$I_{\text{h}} = \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}\,t} \tag{62}$$

Setzen wir sie schon mal in die inhomogene Lösungsformel ein:

$$I = \left(\int \frac{U_0}{L\,I_{\text{h}}}\,\mathrm{d}t + A\right) I_{\text{h}} \tag{63}$$

$$= \left(\int \frac{U_0}{L\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}\,t}}\,\mathrm{d}t + A\right) \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}\,t} \tag{64}$$

$$= \left(\int \frac{U_0}{L}\,\mathrm{e}^{\frac{R}{L}\,t}\,\mathrm{d}t + A\right) \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}\,t} \tag{65}$$

Beachte, dass '1 durch Exponentialfunktion', die ein Minus im Exponenten enthält einfach der Exponentialfunktion ohne das Minuszeichen entspricht.
Jetzt müssen wir das Integral in (**??**) berechnen. Hier ist $\frac{U_0}{L}$ eine Konstante und kann vor das Integral gezogen werden. Und bei der Integration der Exponentialfunktion bleibt sie erhalten. Vor die Exponentialfunktion kommt lediglich $\frac{L}{R}$ als Faktor dazu. Und die Integrationskonstante verstecken wir in der Konstante A:

$$I = \left(\int \frac{U_0}{L}\,\mathrm{e}^{\frac{R}{L}\,t}\,\mathrm{d}t + A\right) \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}\,t} \tag{66}$$

$$= \left(\frac{U_0}{L}\int \mathrm{e}^{\frac{R}{L}\,t}\,\mathrm{d}t + A\right) \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}\,t} \tag{67}$$

$$= \left(\frac{U_0}{L}\,\frac{L}{R}\,\mathrm{e}^{\frac{R}{L}\,t} + A\right) \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}\,t} \tag{68}$$

$$= \left(\frac{U_0}{R}\,\mathrm{e}^{\frac{R}{L}\,t} + A\right) \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}\,t}$$

Und schon haben wir die allgemeine Lösung. Diese können wir durch das Ausmultiplizieren der Klammer noch etwas vereinfachen. Die Exponentialfunktion kürzt sich bei einem Faktor weg:

$$I(t) \;=\; \frac{U_0}{R} \;+\; A\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}\,t} \tag{69}$$

Um eine auf das Problem zugeschnittene Lösung zu bekommen, das heißt, um die unbekannte Konstante A zu bestimmen, brauchen wir eine Anfangsbedingung. Wenn wir sagen, dass der Zeitpunkt $t = 0$ der Zeitpunkt ist, bei dem der Strom I Null war, weil wir den Schalter noch nicht betätigt haben, dann lautet unsere Anfangsbedingung: $I(0) = 0$. Einsetzen in die allgemeine Lösung:

$$I(0) \;=\; 0 \tag{70}$$

$$\tag{71}$$

$$= \frac{U_0}{R} \;+\; A\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}\cdot 0} \tag{72}$$

$$= \frac{U_0}{R} \;+\; A$$

und Umstellen nach A ergibt:

$$A \;=\; -\frac{U_0}{R} \tag{73}$$

Damit haben wir die konkrete Gesamtlösung erfolgreich bestimmt:

$$I(t) \;=\; \frac{U_0}{R} \;-\; \frac{U_0}{R}\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}\,t} \tag{74}$$

$$= \left(1 \;-\; \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}\,t}\right)\frac{U_0}{R}$$

1.9 Lösungsmethode #3: Exponentialansatz

Der Exponentialansatz eignet sich für *gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung* mit konstanten Koeffizienten, die außerdem *linear* sein müssen. Natürlich wird die Methode für höhere Ordnungen schnell komplex. Am besten ist die Methode geeignet für DGL *zweiter Ordnung*. Die allgemeine Form einer linearen DGL 2. Ordnung sieht so aus:

$$y''(x) + K_1\,y'(x) \;+\; K_0\,y(x) \;=\; S \tag{75}$$

Hierbei nehmen wir an, dass die Koeffizienten K_1 und K_0, sowie die Störfunktion unabhängig von x sind, also konstant sind.

Wenn die Störfunktion nicht Null ist, dann musst du zuerst einen Mathematiker fragen. Dann sagt er dir, dass eine allgemeine Lösung y einer inhomogenen lineare DGL sich aus zwei Anteilen zusammensetzt:

- aus einer **homogenen Lösung** y_{h} der DGL
- und aus einer **speziellen Lösung**, die wir mit y_{s} bezeichnen.

$$y \;=\; y_{\text{h}} \;+\; y_{\text{s}} \tag{76}$$

Die homogene Lösung y_{h} löst die DGL (**??**), wenn du die Störfunktion $S(x)$ gleich Null setzt:

$$y_{\text{h}}'' + K_1\, y_{\text{h}}' \;+\; K_0\, y_{\text{h}} \;=\; 0 \tag{77}$$

Bei der Methode, wie der Name schon sagt, machen wir einen Exponentialansatz für die homogene Lösung y_{h}:

$$y_{\text{h}} \;=\; C\,\mathrm{e}^{\lambda\,x} \tag{78}$$

Da in der allgemeinen Form der DGL die erste und die zweite Ableitung von y_{h} vorkommen, müssen wir unseren Exponentialansatz zwei Mal ableiten. Die erste Ableitung ist:

$$y_{\text{h}}' \;=\; C\,\lambda\,\mathrm{e}^{\lambda\,x} \tag{79}$$

Und die zweite Ableitung ist:

$$y_{\text{h}}'' \;=\; C\,\lambda^2\,\mathrm{e}^{\lambda\,x} \tag{80}$$

Jetzt können wir den Exponentialansatz und die dazugehörigen Ableitungen in die homogene DGL einsetzen:

$$C\,\lambda^2\,\mathrm{e}^{\lambda\,x} + K_1\,C\,\lambda\,\mathrm{e}^{\lambda\,x} \;+\; K_0\,C\,\mathrm{e}^{\lambda\,x} \;=\; 0 \tag{81}$$

Klammern wir $C\,\mathrm{e}^{\lambda\,x}$ aus:

$$C\,\mathrm{e}^{\lambda\,x}\,\left(\lambda^2 + K_1\lambda \;+\; K_0\right) \;=\; 0 \tag{82}$$

Wenn wir durch den Faktor $C\,\mathrm{e}^{\lambda\,x}$ teilen, dann bekommen wir die sogenannte **charakteristis-**

che Gleichung für λ:

$$\lambda^2 + K_1\lambda + K_0 = 0 \tag{83}$$

Wenn wir diese Gleichung lösen, dann finden wir das unbekannte λ heraus. Da es eine quadratische Gleichung für λ ist, bekommen wir zwei Lösungen λ_1 und λ_2. Beide müssen wir gleich berücksichtigen.

Im Grunde kannst du die charakteristische Gleichung direkt durch das Angucken deiner DGL aufstellen, ohne diese ganzen Schritte machen zu müssen. Vergleiche dazu die homogene DGL mit der charakteristischen Gleichung. Der Koeffizient vor dem λ^2 steht vor der zweiten Ableitung von y. In diesem Fall der Koeffizient ist 1. Der Koeffizient von λ steht vor der ersten Ableitung von y, in diesem Fall K_1. Und der Koeffizient K_0 vor der Funktion y selbst, steht in der charakteristischen Gleichung allein da. Wenn du übrigens eine homogene DGL 3. Ordnung hättest, dann würde die charakteristische Gleichung bei λ^3 anfangen und so weiter.

Eine quadratische Gleichung hat wie gesagt zwei Lösungen λ_1 und λ_2 und diese kannst du beispielsweise mithilfe der pq-Formel bestimmen:

$$\lambda_1, \lambda_2 = -\frac{K_1}{2} \pm \sqrt{\frac{{K_1}^2}{4} - K_0} \tag{84}$$

Da du zwei λ Werte bekommst, müssen wir beide berücksichtigen. Dazu musst den Exponentialansatz um einen weiteren Term erweitern, in dem der zweite λ-Wert im Exponenten steht. Mit den dazugehörigen λ-Werten ist das auch schon die Lösung der homogenen Differentialgleichung (**??**):

Lösungsansatz der homogenen linearen DGL 2. Ordnung

$$y_{\text{h}} = C_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 x} \quad \text{mit} \quad \lambda_1, \lambda_2 = -\frac{K_1}{2} \pm \sqrt{\frac{{K_1}^2}{4} - K_0} \tag{85}$$

Je nach dem, welche Werte die Koeffizienten K_1 und K_0 haben, können die Lösungen ein unterschiedliches Verhalten zeigen. Denn, wenn K_0 größer ist als $\frac{{K_1}^2}{4}$, dann ziehst du die Wurzel aus einer negativen Zahl. In diesem Fall bekommst du eine Lösung, die Schwingungen beschreibt. Das zeige ich dir noch in einem Beispiel.

Wenn die zu lösende DGL dagegen inhomogen ist, also die Störfunktion nicht Null ist, dann müssen wir noch die spezielle Lösung y_{s} zur homogenen Lösung hinzu addieren, um eine allgemeine Lösung herauszufinden.

Für die spezielle Lösung müssen wir einen passenden Ansatz wählen, der davon abhängt, wie die Störfunktion S ist. Hier schauen wir uns den einfachsten möglichen Fall an, nämlich, wenn die Störfunktion S konstant ist. Dann ist die spezielle Lösung gegeben durch Störfunktion geteilt durch den Koeffizienten K_0, der vor der gesuchten Funktion steht: $y_{\text{s}} = \frac{S}{K_0}$. Um nun eine allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen DGL 2. Ordnung zu bekommen, müssen wir die homogene Lösung und die spezielle Lösung zusammenaddieren:

Lösungsansatz der inhomogenen linearen DGL 2. Ordnung mit konstanter Störfunktion

$$y \;=\; C_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1\,x} \;+\; C_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2\,x} \;+\; \frac{S}{K_0} \;\text{ mit }\; \lambda_1, \lambda_2 \;=\; -\frac{K_1}{2} \;\pm\; \sqrt{\frac{{K_1}^2}{4} - K_0} \tag{86}$$

Die beiden unbekannten Konstanten C_1 und C_2 werden, wie du weißt, durch die Nebenbedingungen bestimmt. Beachte außerdem, dass diese Methode des Exponentialansatzes eine *Ratemethode* ist. Es kann auch passieren, dass der Exponentialansatz scheitert. Deshalb solltest du, wenn du eine Lösungsmethode anwendest, die das Wort 'Ansatz' in ihrem Namen trägt, deine Lösung auf jeden Fall überprüfen. Das machst du, indem du die herausgefundene Lösung in die DGL einsetzt und schaust, ob beide Seiten gleich sind.

Beispiel aus der Mechanik: Eine schwingende Masse

Erinnerst du dich noch an die Differentialgleichung für die schwingende Masse?

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{D}{m}y = 0 \tag{87}$$

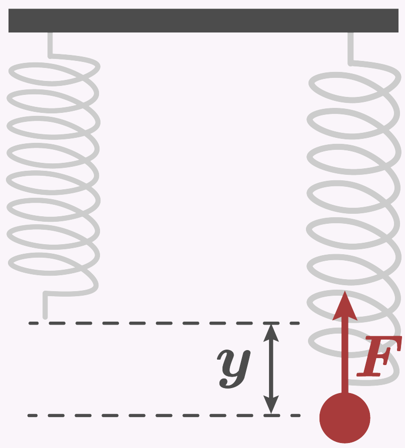

Figure 6: Hooke'sches Gesetz

Das ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die Störfunktion ist sogar Null. Das heißt, wir müssen nur die homogene Lösung herausfinden. Und das machen wir mit dem eben kennengelernten Exponentialansatz.
Lass uns dazu erstmal die DGL in einer kompakteren Newton-Notation schreiben, mit den Punkten für die Zeitableitungen:

$$\ddot{y} + \frac{D}{m}y = 0 \tag{88}$$

Gehen wir den schnellen Weg und schreiben direkt die charakteristische Gleichung für diese DGL hin. Wir erwarten eine quadratische Gleichung, da wir eine DGL 2. Ordnung haben. Vor der zweiten Ableitung steht der Koeffizient 1, also schreiben wir einfach λ^2 hin. Dann kommt der Koeffizient vor der ersten Ableitung. Da in der DGL die erste Ableitung fehlt, ist der λ-Term in der charakteristischen Gleichung ebenfalls nicht da. Anschließend kommt der Koeffizient, der vor der gesuchten Funktion selbst steht, nämlich D/m. Dieser Koeffizient steht in der charakteristischen Gleichung allein dar. Insgesamt lautet die charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + \frac{D}{m} = 0 \tag{89}$$

Für diese Gleichung brauchen wir nicht mal die pq-Formel. Die Lösung bekommen wir direkt, wenn wir zuerst D/m auf die andere Seite bringen:

$$\lambda^2 = -\frac{D}{m} \tag{90}$$

und dann noch die Wurzel ziehen:

$$\lambda = \pm\sqrt{-\frac{D}{m}} \tag{91}$$

Bedenke, dass die Umkehrung des Quadrats zwei Lösungen ergibt, eine positive und eine negative Wurzel. Außerdem haben wir hier einen interessanten Fall, wo die Wurzel aus einer negativen Zahl gezogen wird. Wurzel aus einer negativen Zahl ergibt keine reelle Zahl mehr, sondern eine imaginäre Zahl. Erinnerst du dich noch daran, was das für das betrachtete System bedeutet? Wir erwarten, dass das System *schwingen* muss!
Auch, wenn du dich noch nicht mit imaginären oder komplexen Zahlen auskennst, du kannst in diesem Fall den Term unter der Wurzel in ein Produkt aus -1 und D/m aufteilen. Nach den Wurzelgesetzen kannst du dieses Produkt in zwei Wurzeln aufteilen:

$$\lambda = \pm\sqrt{-1}\,\sqrt{\frac{D}{m}} \tag{92}$$

Die Wurzel aus -1 ist definiert als die imaginäre Einheit, eine Zahl, die wir mit i bezeichnen. Mehr zu den imaginären Zahlen musst du nicht wissen:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \pm i\sqrt{\frac{D}{m}} \tag{93}$$

Setzen wir nur noch die herausgefundenen λ-Werte in den Exponentialansatz ein, dann bekommen wir die allgemeine Lösung für die betrachtete DGL. Lass uns am besten den Ausdruck $\sqrt{\frac{D}{m}}$ etwas kompakter mit ω bezeichnen:

$$y(t) \; = \; C_1 \, \mathrm{e}^{i\,\omega\,t} \; + \; C_2 \, \mathrm{e}^{-i\,\omega\,t} \tag{94}$$

Diese Lösung sieht auf den ersten Blick sehr abstrakt aus. Aber gleich wirst du lernen, dass eine derartige Lösung Schwingungen beschreibt. Doch lass uns als erstes die unbekannten Konstanten C_1 und C_2 mithilfe von zwei Anfangsbedingungen herausfinden. Zum Beispiel könnten wir beobachtet haben, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ die Auslenkung der Feder maximal war. Wir können dann beispielsweise die maximale Auslenkung auf den Wert 1 setzen. Die Anfangsbedingung lautet also $y(0) = 1$. Füge diese Bedingung in die allgemeine Lösung ein, um C_1 zu bestimmen. Die Exponentialfunktionen werden dabei zu 1:

$$1 \; = \; y(0) \tag{95}$$

$$= \; C_1 \, \mathrm{e}^{i\,\omega \cdot 0} \; + \; C_2 \, \mathrm{e}^{-i\,\omega \cdot 0} \tag{96}$$

$$= \; C_1 \; + \; C_2$$

Umstellen nach C_1 ergibt:

$$C_1 \; = \; 1 \; - \; C_2 \tag{97}$$

Als nächstes müssen wir die Unbekannte C_2 bestimmen. Hier können wir beispielsweise die Anfangsbedingung benutzen, dass zum gleichen Zeitpunkt $t = 0$ die Geschwindigkeit der Masse 0 war. In der Physik lernst du, dass Geschwindigkeit der ersten Zeitableitung des Wegs, also in diesem Fall der Auslenkung, entspricht. Unsere zweite Anfangsbedingung lautet also: $y'(0) = 0$.

Damit wir sie überhaupt benutzen können, müssen wir unsere allgemeine Lösung einmal nach der Zeit ableiten. Ich hoffe du weißt, wie eine Exponentialfunktion abgeleitet wird! Der Faktor vor dem t im Exponenten landet beim Ableiten vor der Exponentialfunktion:

$$y'(t) \;=\; i\,\omega\,C_1\,\mathrm{e}^{i\,\omega\,t} \;-\; i\,\omega\,C_2\,\mathrm{e}^{-i\,\omega\,t} \tag{98}$$

Jetzt können wir unsere Anfangsbedingung für die Ableitung benutzen. Dabei werden die Exponentialfunktionen zu 1 und die Faktoren $i\,\omega$ kürzen sich weg:

$$0 \;=\; y'(0) \tag{99}$$

$$= \; i\,\omega\,C_1\,\mathrm{e}^{i\,\omega\cdot 0} \;-\; i\,\omega\,C_2\,\mathrm{e}^{-i\,\omega\cdot 0} \tag{100}$$

$$= \; C_1 \;-\; C_2$$

Umstellen nach C_2 ergibt:

$$C_2 \;=\; C_1 \tag{101}$$

Wir wissen jetzt also dass C_2 gleich C_1 sein muss. Sehr schön. Um konkret C_1 zu bestimmen, ersetzten wir in $C_1 \;=\; 1 \;-\; C_2$ die Konstante C_2 mit C_1, da sie ja gleich sind:

$$C_1 \;=\; 1 - C_1 \tag{102}$$

Umstellen nach C_1 ergibt $C_1 = \frac{1}{2}$. Setzen wir diese Konstante in die allgemeine Lösung ein:

$$y(t) \;=\; \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{i\,\omega\,t} \;+\; \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-i\,\omega\,t} \tag{103}$$

So weit so gut. Lass uns jetzt herausfinden, was diese Lösung mit Schwingungen zu tun hat. Dazu holen wir unseren Freund Euler zur Hilfe. Dieser wird uns seine berühmte Euler-Formel verraten:

$$\mathrm{e}^{i\,\omega\,t} \;=\; \cos(\omega\,t) \;+\; i\,\sin(\omega\,t) \tag{104}$$

Diese Beziehung sagt uns, wie eine komplexe Exponentialfunktion $\mathrm{e}^{i\,\omega\,t}$ mit Cosinus und Sinus zusammenhängt. Damit können wir nämlich unsere Lösung etwas umschreiben. Die erste komplexe Exponentialfunktion in der Lösung wird nach der Euler-Formel zu Cosinus und Sinus mit positivem $\omega\,t$. Und die zweite Exponentialfunktion wird zu Cosinus und Sinus mit negativem $-\omega\,t$:

$$\begin{aligned} y(t) \;&=\; \frac{1}{2}\cos(\omega\,t) \;+\; \frac{1}{2}\,i\,\sin(\omega\,t) \\ &+\; \frac{1}{2}\cos(-\omega\,t) \;+\; \frac{1}{2}\,i\,\sin(-\omega\,t) \end{aligned} \tag{105}$$

Das Minuszeichen im Argument von Cosinus können wir weglassen, weil Cosinus symmetrisch ist. Symmetrisch bedeutet, dass $\cos(-x)$ gleich $\cos(x)$ ist. Die Sinusfunktion dagegen ist antisymmetrisch. Deshalb dürfen wir das Minuszeichen im Argument nicht weglassen. Aber wir dürfen das Minuszeichen vor die Sinusfunktion ziehen: $\sin(-x) = -\sin(x)$. Das ist die Eigenschaft antisymmetrischer Funktion. Nutzen wir diese Eigenschaften in unserer Lösung aus:

$$\begin{aligned} y(t) \;&=\; \frac{1}{2}\cos(\omega\,t) \;+\; \frac{1}{2}\,i\,\sin(\omega\,t) \\ &+\; \frac{1}{2}\cos(\omega\,t) \;-\; \frac{1}{2}\,i\,\sin(\omega\,t) \end{aligned} \tag{106}$$

Jetzt siehst du, warum diese Umformung sinnvoll war. Jetzt kürzen sich nämlich die beiden komplexen Sinusfunktionen weg und mit ihnen verschwindet auch die imaginäre Einheit. Übrig bleiben die reellen Cosinus-Funktionen, die wir zusammenaddieren können:

$$y(t) \;=\; \cos\left(\omega\,t\right) \tag{107}$$

Wie du siehst: Die Auslenkung der Masse an der Feder wird durch die Cosinus-Funktion beschrieben. Da Cosinus eine periodische Funktion ist, beschreibt unsere Lösung eine Schwingung.

1.10 Lösungsmethode #4: Produktansatz (Separationsansatz)

Schauen wir uns noch die letzte Lösungsmethode an, den Separationsansatz. Dieser wird manchmal auch **Produktansatz** genannt. Warum, wirst du gleich sehen. Diese Methode eignet sich für *partielle Differentialgleichungen beliebiger Ordnung*. Diese Lösungsmethode dient quasi nur dazu, eine partielle DGL in mehrere gewöhnliche Differentialgleichungen zu verwandeln und diese dann mit anderen Methoden zu lösen.

Schauen wir uns diese Methode am besten direkt an einem Beispiel an. Die eindimensionale Wellengleichung für elektrisches Feld eignet sich dafür am besten:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \tag{108}$$

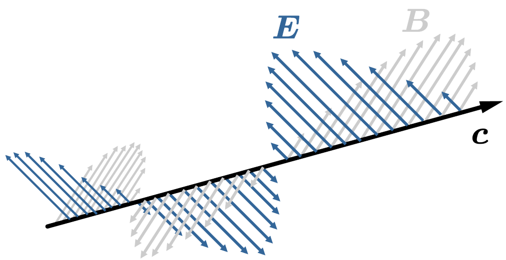

Figure 7: Eine elektromagnetische Welle, deren E-Feld und B-Feld Anteile schwingen.

Die gesuchte Funktion ist das elektrische Feld $E(t,x)$. Dieses hängt von x und von t ab. Da die gesuchte Funktion von zwei Variablen abhängt und ihre Ableitungen in der DGL vorkommen, handelt es sich um eine partielle Differentialgleichung.

Wie gehen wir nun vor? Hier machen wir einen Produktansatz für die gesuchte Lösung E:

$$E(x,t) = R(x)\,U(t) \tag{109}$$

Wir nehmen quasi an, dass die gesuchte Lösung E sich in ein Produkt von zwei Funktionen $R(x)$ und $U(t)$ aufspalten lässt. Die eine Funktion, R, hängt dabei nur von x ab. Und die andere Funktion U, hängt nur von t ab. In der Wellengleichung kommt die zweite Ableitung von E nach der Zeit und nach dem Ort vor. Das heißt, wir müssen unseren Produktansatz zuerst ableiten, bevor wir diesen in die Wellengleichung einsetzen. Die Ableitung des Produktansatzes nach x ergibt $U(t)\,\frac{\partial^2 R(x)}{\partial x^2}$, da U unabhängig von x ist und somit in der Ableitung wie eine Konstante ist. Bei der Ableitung des Produkts nach der Zeit t dagegen ist die Funktion R eine Konstante, weil sie nicht von t abhängt:

$$U(t)\,\frac{\partial^2 R(x)}{\partial x^2} \;=\; \frac{1}{c^2}\,R(x)\,\frac{\partial^2 U(t)}{\partial t^2} \tag{110}$$

Das Ziel ist es nun alles, was von x abhängt von dem zu trennen, was von t abhängt. Dazu teilen wir diese DGL durch das Produkt $R(x)\,U(t)$:

$$\frac{1}{R(x)}\,\frac{\partial^2 R(x)}{\partial x^2} \;=\; \frac{1}{c^2}\,\frac{1}{U(t)}\,\frac{\partial^2 U(t)}{\partial t^2} \tag{111}$$

Dadurch haben wir erreicht, dass alles, was von x abhängt, auf der linken Seite steht und das was von t abhängt alles auf der rechten Seite steht. Wenn du es schaffst eine partielle DGL so zu separieren, dann war der Separationsansatz erfolgreich.

Jetzt können wir x auf der linken Seite variieren, ohne, dass sich die rechte Seite verändert, da auf der rechten Seiten ja kein x vorkommt. Das gleiche gilt für die Zeit t. Wenn wir die Zeit auf der rechten Seite verändere, bleibt die linke Seite unverändert, da dort keine Zeit t vorkommt. Damit müssen beide Seiten konstant sein. Setzen wir also die linke und die rechte Seite einer Konstanten K gleich:

$$\frac{1}{R(x)}\,\frac{\partial^2 R(x)}{\partial x^2} \;=\; K \tag{112}$$

$$\tag{113}$$

$$\frac{1}{c^2}\,\frac{1}{U(t)}\,\frac{\partial^2 U(t)}{\partial t^2} \;=\; K$$

Damit haben wir eine *partielle* Differentialgleichung in *zwei gewöhnliche* Differentialgleichungen umgewandelt. Und die beiden DGL sind sogar nicht gekoppelt, das heißt du kannst sie unabhängig voneinander lösen und die Lösungen dann nach dem Produkansatz miteinander multiplizieren, um die Lösung der partiellen DGL zu erhalten.

Die beiden gewöhnlichen DGL kannst du mit dem zuvor kennengelernten Exponantialansatz lösen.

1.11 So, das wars...

So. Nun hast du alles nötige kennengelernt, um Differentialgleichungen zu klassifizieren und auch einfache Differentialgleichungen zu lösen.

- Trennung der Variablen für gewöhnliche homogene DGL 1. Ordnung

- Variation der Konstanten für gewöhnliche lineare DGL 1. Ordnung
- Exponentialansatz für gewöhnliche DGL beliebiger Ordnung
- Separationsansatz für partielle Differentialgleichungen

Es gibt natürlich noch mehr Klassifizierungen und Lösungsmethoden. Es gibt ganze Bücher, die dem Lösen von Differentialgleichungen gewidmet sind. Manche DGL sind so komplex, dass man lieber erst gar nicht versucht, sie per Hand zu lösen, wie beispielsweise die Navier-Stokes-Differentialgleichungen. Numerisches Lösen mit dem Computer ist hier angesagt. Das ist aber ein anderes großes Thema, dass du in einer anderen Lektion lernst.